

钠原子光谱

研究元素的光谱是了解原子结构的一个重要途径。通过对原子光谱的研究，可以了解原子内部电子的运动，并导致电子自旋的发现和元素周期表的解释。

通过对氢原子光谱的研究，人们认识到电子绕原子核运动时只能处于一些能量不连续的状态，得到了关于氢原子结构的认识。氢原子是单电子原子，结构比较简单，原子内部相互作用也比较简单。对于多电子原子，除了原子核与电子的相互作用外，还存在着电子之间的相互作用，电子的自旋运动和轨道运动间的相互作用也更加显著。钠原子序数为 11，具有稳定的满内壳层结构，外层有一个价电子，其光谱结构比较简单，也比较典型。在激光光谱日益发展的今天，钠原子光谱仍是人们深入研究的对象之一。本实验以钠原子光谱为例，研究多电子原子的光谱结构，以加深对碱金属原子的外层电子与原子实相互作用以及自旋运动与轨道运动相互作用的理解。

预习思考

1. 与氢原子主量子数相同的能级相比，钠原子的能级有哪些差别，造成这些差别的原因是什么？
2. 如何通过光栅光谱仪获得钠原子的光谱图像？
3. 根据测量的钠光谱线结果，如何利用里德伯表求出各个线系谱线对应的上下能级的主量子数、量子缺和光谱项，进而绘制出钠原子的能级图？

实验目的

1. 学习使用光栅光谱仪测量钠原子光谱的实验方法。
2. 加深对碱金属原子的外层电子与原子实相互作用以及自旋与轨道运动相互作用的理解。
3. 掌握计算钠原子的价电子在不同轨道运动时的量子缺失的方法，学会绘制钠原子的部分能级图。

实验原理

一、钠原子光谱的线系

氢原子光谱线的波数可写成：

$$\nu = R_H \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \quad (1.1)$$

式中 R_H 是氢的里德伯常数。当 $n_1=2$, n_2 依次为 3, 4, 5, ... 时，为巴耳末线系各谱线波数。原子能级 E_n 可表示为

$$E_n = -c \frac{R_H}{n^2} \quad (1.2)$$

令 $T_n = R_H / n^2$ ，则 $E_n = -cT_n$ ， T_n 称为光谱项。

对于只有一个价电子的碱金属原子，例如钠原子，其价电子是在核与内层电子所组成的原子实的库仑场中运动，和氢原子有些类似。但是，由于原子实的存在，价电子处于不同量子态时，或者按轨道模型描述，处于不同的轨道时，它和原子实的相互作用是不同的。价电子处于不同轨道时，它们的轨道在原子实中的贯穿程度也不同，所以受到的作用不同；还有，价电子处于不同轨道时，引起原子实极化的程度也不同。这二者都要影响原子的能量，因此，电子所处轨道的主量子数 n 相同，轨道量子数 l 不同，原子的能量也是不同的。所以

原子的能量与价电子所处轨道的量子数 n 、 l 都有关。轨道贯穿和原子实极化都可以使原子的能量减少。量子数 l 越小，轨道进入原子实部分越多，原子实的极化也越显著，因而原子的能量减少得越多。与主量子数 n 相同的氢原子相比，碱金属原子的能量要小。而且不同的轨道量子数 l 对应着不同的能量， l 值越小，能量越小； l 越大，越接近相应的氢原子能级的能量。

对于钠原子，我们可以用有效量子数 n^* 代替 n ，来统一描述轨道贯穿和原子实极化的总效果。若不考虑电子自旋和轨道运动的相互作用引起的能级分裂，可把光谱项表示为：

$$T_{nl} = R/n^{*2} = R/(n - \Delta_l)^2 \quad (1.3)$$

上式的 $R=109737.31568549\text{cm}^{-1}$ 为里德伯常量； Δ_l 称为量子缺失；而 n^* 不再是整数。由于 $\Delta_l > 0$ ，因此有效量子数 n^* 比主量子数 n 要小。理论计算和实验观测都表明，当 n 不很大时，量子缺的大小主要决定于 l ，而与 n 的关系很小。本实验中近似认为它是一个和 n 无关的量。

由此可知，电子由上能级跃迁至下能级时，发射光谱谱线的波数可以用下式表示：

$$\nu = R \left[\frac{1}{n_1^{*2}} - \frac{1}{n_2^{*2}} \right] = R \left[\frac{1}{(n' - \Delta_{l'})^2} - \frac{1}{(n - \Delta_l)^2} \right] \quad (1.4)$$

式中 n_2^* 和 n_1^* 分别为上下能级的有效量子数； n 、 Δ_l 和 n' 、 $\Delta_{l'}$ 分别为上下能级的主量子数和量子缺； l 、 l' 分别为上下能级所对应的轨道量子数。令 n' 、 l' 固定，当 n 依次改变时 (l 的选择定则为 $\Delta l = \pm 1$)，则可得到一系列的波数值，从而构成一个光谱线系。通常利用 $n'l' \sim nl$ 这种符号来表示线系，而 $n'l'$ 能级光谱项称为固定项。 $l=0, 1, 2, 3$ 分别用 S, P, D, F 表示。钠原子光谱有四个线系。

主线系 (P 线系): $3S \sim nP, n=3, 4, 5, \dots$

漫线系 (D 线系): $3P \sim nD, n=3, 4, 5, \dots$

锐线系 (S 线系): $3P \sim nS, n=4, 5, 6, \dots$

基线系 (F 线系): $3D \sim nF, n=3, 4, 5, \dots$

在钠原子光谱的四个线系中，主线系的下能级是基态 ($3S_{1/2}$)。在光谱学中，主线系的第一组线 (双线) 为共振线。钠原子的共振线就是有名的双黄线 (588.995nm 和 589.592nm)。钠原子主线系的其他谱线在紫外区域。基线系在红外区域，漫线系和锐线系除第一组谱线在近红外区域，其余都在可见光区。漫线系和锐线系的下能级都是 $3P$ 能级，它们的上能级分别对应价电子的 D 轨道和 S 轨道。前者易受外电场影响，在钠原子的电弧放电光谱中，漫线系的光谱边缘较弥漫，谱线展宽明显，而锐线系谱线较清晰，边缘较细锐。

二、钠原子光谱的双重结构

电子具有自旋，其自旋量子数 $S=1/2$ 。由于电子自旋和轨道运动的相互作用，使原子具有了附加能量。这个附加能量除了与量子数 n 、 l 有关外，还和原子的总角动量量子数 j 有关。因而，考虑自旋的作用，原子的一个能级会分裂为不同能级。

碱金属原子只有一个价电子，不考虑原子实的角动量 (原子核的自旋影响很小，可忽略)，原子的总角动量就等于价电子的角动量。对应 S 轨道 ($l=0$) 的电子，其轨道角动量为零。总角动量就等于电子的自旋角动量，所以 j 可取一个数值，即 $j=1/2$ ，从而 S 谱项只有一个能级，是单重能级。对于 l 不为零的 P, D, F 轨道 ($l=1, 2, 3$)， j 可能取 $j=l \pm 1/2$ 两个数值，所以相应的能级会分裂为双重能级。根据量子力学结果，发生分裂的双重能级的光谱项可以表示为

$$T_{nl, j=l+1/2} = \frac{R}{(n - \Delta l)^2} - \frac{l}{2} \xi_{nl} \quad T_{nl, j=l-1/2} = \frac{R}{(n - \Delta l)^2} + \frac{l+1}{2} \xi_{nl} \quad (1.5)$$

式中 ξ_{nl} 是只与 n, l 有关的因子, 称为单电子的分裂因子, 等于

$$\xi_{nl} = \frac{Ra^2(Z_s^*)^4}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \quad (1.6)$$

式中 R 为里德伯常数; $a=1/137.036$ 为精细结构常数; Z_s^* 为原子实的有效电荷数。由 (1.5) 和 (1.6) 式可以看出, 双重能级的间隔可用波数差表示为

$$\Delta\nu = (l+1/2)\xi_{nl} = \frac{Ra^2(Z_s^*)^4}{n^3 l(l+1)} \quad (1.7)$$

由上式可以看出, 双重能级的间隔随 n 和 l 的增大而迅速减小。由于能级发生分裂, 碱金属原子的光谱存在着双重结构。

1. 光谱线双重结构不同成分的波数差

对钠原子光谱, 主线系对应的电子跃迁的下能级为单重能级 $3S$ 谱项, 对应 $j=1/2$ 。上能级分别为 $3P, 4P, \dots$ 双重能级谱项, 其相应量子数分别为 $1/2$ 和 $3/2$ 。由于电子在不同能级间跃迁时, 量子数 j 的选择定则为 $\Delta j=0, \pm 1$, 因此, 主线系各组光谱线均包含双重结构的两个部分, 其波数差即是上能级中双重能级的波数差, 如图 1.1 所示。因此测量出主线系光谱线双重结构两个成分的波长, 就可以确定 $3P, 4P, \dots$ 等谱项双重分裂的大小。

由锐线系所对应的跃迁可以看出, 如图 1.2, 锐线系光谱线也包含双重结构的两个成分, 但两个成分的波数差都相等, 等于 $3P$ 谱项双重分裂的大小。

漫线系谱线对应的跃迁的上下能级都是双重能级, 如图 1.3。根据选择定则 $\Delta j=0, \pm 1$, 每一组谱线的多重结构中应有三个成分。但这样的一组谱线不叫做三重线, 而是称作复双重线。原因在于这些谱线仍是由双重能级之间的跃迁产生的, 并且这三个成分中有一个成分的强度比较弱, 而且它与另一个成分十分靠近。如果仪器的分辨率不够高, 通常只能观察到两个成分, 所以这两个成分的波数差近似等于 $3P$ 谱线的双重分裂。

基线系谱线与漫线系谱线的形成原理近似, 这里不再做讨论。

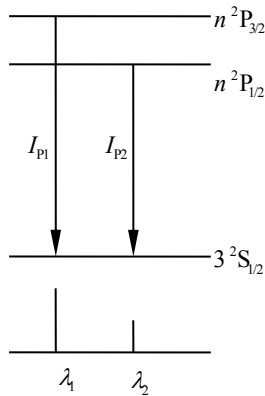


图 1.1 主线系双重结构

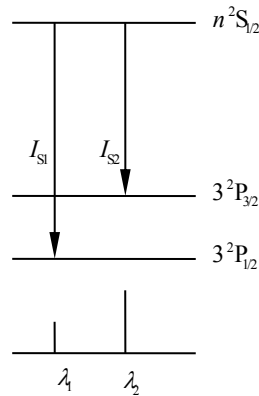


图 1.2 锐线系双重结构

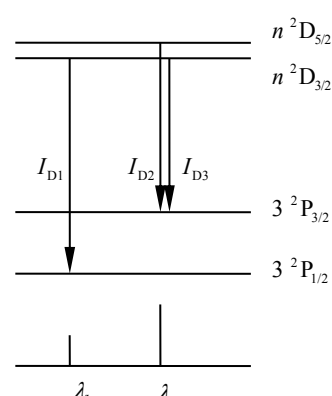


图 1.3 漫线系双重结构

2. 光谱线双重结构不同成分的相对强度。

碱金属原子光谱不同线系的差别还表现在强度方面。谱线跃迁的相对强度可以利用谱线跃迁的强度和定则来估算。强度和定则是: (1) 从同一能级向下能级跃迁产生的所有谱线成分的强度和正比于该能级的统计权重 g_{\uparrow} 。每一能级的统计权重 $g=2j+1$, j 为总角动量量子数。(2) 终于同一下能级的所有谱线的强度和正比于该能级的统计权重 g_{\downarrow} 。将强度和定则分别应用到钠原子光谱的不同线系, 就可以得到各个线系双重结构不同成分的相对强

度比。

主线系光谱的双重线是 $3^2S_{1/2} \sim n^2P_{3/2,1/2}$ ($n=3, 4, 5, \dots$) 之间跃迁产生的, 如图 1.1 所示。其上能级是双重的, 下能级是单重的, 由强度和定则, 两个成分 λ_1 、 λ_2 的强度比为

$$\frac{I_{P1}}{I_{P2}} = \frac{g_{3/2}}{g_{1/2}} = \frac{2 \times \frac{3}{2} + 1}{2 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{1} \quad (1.8)$$

其中 $g_{3/2}$ 和 $g_{1/2}$ 分别是上能级 $n^2P_{3/2}$ 和 $n^2P_{1/2}$ 的统计权重。因此主线系中两波长成分的强度比为 2:1。其中 λ_1 是短波成分, λ_2 为长波成分。

锐线系光谱的双重线是 $3^2P_{3/2,1/2} \sim n^2S_{1/2}$ ($n=4, 5, \dots$) 之间跃迁产生的, 如图 1.2 所示。其上能级是单重的, 下能级是双重的, 由强度和定则, 两个成分 λ_1 、 λ_2 的强度比为

$$\frac{I_{S1}}{I_{S2}} = \frac{g_{1/2}}{g_{3/2}} = \frac{1}{2} \quad (1.9)$$

其中 $g_{1/2}$ 和 $g_{3/2}$ 分别是下能级 $3^2P_{1/2}$ 和 $3^2P_{3/2}$ 的统计权重。因此锐线系中光谱双重结构的两个成分中短波与长波的强度比为 1:2, 与主线系情况相反。

漫线系光谱的复双重线是 $3^2P_{3/2,1/2} \sim n^2D_{5/2,3/2}$ ($n=3, 4, 5, \dots$) 之间跃迁产生的, 如图 1.3 所示。这时上下能级都是双重的。复双重线三个成分的波长从小到大依次为 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 , 相应强度分别为 I_{D1} 、 I_{D2} 、 I_{D3} , 根据强度和定则 (1):

$$\frac{I_{D2}}{I_{D1} + I_{D3}} = \frac{g_{5/2}}{g_{3/2}} = \frac{6}{4} \quad (1.10)$$

其中 $g_{5/2}$ 和 $g_{3/2}$ 分别是上能级 $n^2D_{5/2}$ 和 $n^2D_{3/2}$ 的统计权重。根据强度和定则 (2):

$$\frac{I_{D2} + I_{D3}}{I_{D1}} = \frac{g_{3/2}}{g_{1/2}} = \frac{4}{2} \quad (1.11)$$

其中 $g_{3/2}$ 和 $g_{1/2}$ 分别是下能级 $3^2P_{3/2}$ 和 $3^2P_{1/2}$ 的统计权重。由以上两式可解得 $I_{D1}:I_{D2}:I_{D3}=5:9:1$ 。由于 λ_2 、 λ_3 相距很近, 很难分开, 所以这两个成分可以作为一个成分看待, 其波长用 λ_{23} 表示。由此可见, 漫线系双重线短波成分与长波成分的强度比也是 1:2=5:(9+1), 与锐线系相同。基线系情况同漫线系相似, 这里不作讨论。

在实际测量过程中, 由于主线系谱线存在自吸收过程, 使得主线系中短波成分与长波成分的强度比不再是 2:1。尽管如此, 由于锐线系、漫线系不存在自吸收, 所以我们仍然可以把主线系与锐线系、漫线系区分开。

实验装置 (仪器)

钠灯光源、光栅光谱仪。

实验内容

1. 利用钠原子光谱双黄线校准仪器波长。

检查仪器状态之后, 首先找到钠的双黄线, 这是钠原子光谱中最强的谱线。通过光谱仪测量双黄线中任一谱线的波长, 算出它与标准数值 (588.995nm 和 589.592nm, 附录 1) 的差值, 按照仪器提供的修正方法将差值输入, 完成仪器校准工作。

2. 观察、测量钠原子光谱其他谱线的波长。

钠原子光谱中谱线强度相差较大, 必须在不同条件下观测, 才可以获得各波长强度适合观测的谱线。调整的方法主要是调节入、出射狭缝的宽度, 仪器控制单元的各项设置 (如“负高压”和“增益”的大小) 等。按照谱线的特点寻找全部可能找到的钠的光谱线, 凡

是能分开的双线都需要分别单独测量。

3. 数据处理。

严格的数据处理应将测量的波长换算为真空中的波长。另外，由于同一线系双重线的不同成分对应不同能级间的跃迁，比如锐线系中长波成分的下能级是 $3^2P_{3/2}$ ，而短波成分则为 $3^2P_{1/2}$ ，因此在进行数据处理时，长波成分与短波成分应当分别处理。但由于本实验结果计算量子缺失只要求 2~3 位有效数字，故在数据处理时可直接使用空气中测得的波长，并将双重线的两不同成分波长的平均值作为该组谱线的波长值。这都是一种近似计算。

如果不考虑谱线的双重分裂，则在每一线系中，由式 (1.4)，相邻组谱线的波数差为

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{R}{(n - \Delta_l)^2} - \frac{R}{(n + 1 - \Delta_l)^2} \quad (1.12)$$

为计算方便，令 $n - \Delta_l = m + a$ 。其中 m 为整数， a 为正小数，则上式可写为

$$\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = \frac{R}{(m + a)^2} - \frac{R}{(m + 1 + a)^2} \quad (1.13)$$

波数差 $\Delta\nu$ 既求出，而且 R 是已知量，所以由上式可算出 $m+a$ 的值。但为方便起见，常借助于里德伯表（附录 2）直接求出 m 和 a 。表中列出了所有各 m 、 a 对应的光谱项值及 a 相同而 m 相差 1 的两个项值之差 $\Delta\nu$ 。故可由实验中所求得的 $\Delta\nu$ ，用内插法求出对应的 m 、 a ，然后由 $n - \Delta_l = m + a$ 求出量子缺失 Δ_l 。

例如，设实验测得主线系两条双重谱线（3S~4P）与（3S~5P）的平均波长分别为 $\lambda_1 = 330.266\text{nm}$ 与 $\lambda_2 = 285.293\text{nm}$ ，波数分别为 $\nu_1 = 30278.62\text{cm}^{-1}$ 和 $\nu_2 = 35051.68\text{cm}^{-1}$ 。则波数差为

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = 4773.06\text{cm}^{-1}$$

这就是 4P 与 5P 能级间的波数差。这个数在里德伯表中介于 4727.32 和 4808.16 之间（在 m 为 3 和 4 之间 34 一列上）。在 4727.32 的左侧 11129.73 对应于 $m=3$ ， $a=0.14$ ，即有效量子数 $n_1^* = 3.14$ ；而其右侧的 6402.41 对应于 $m=4$ ， $a=0.14$ ，即有效量子数为 $n_2^* = 4.14$ 。也就是说，4727.32 实际上为 $n_1^* = 3.14$ 和 $n_2^* = 4.14$ 两光谱项之差。同理，4808.16 实际上为 $n_1^* = 3.12$ 和 $n_2^* = 4.12$ 两光谱项之差。设实际上测量的项差值 4773.06 为 n_1^* 与 n_2^* 两光谱项之差，则 n_1^* 应介于 3.14 与 3.12 之间， n_2^* 应介于 4.14 与 4.12 之间，差别仅在小数部分。利用内插法可求 a 的实际值：

$$a = 0.12 + \frac{4808.16 - 4773.06}{4808.16 - 4727.32} \times (0.14 - 0.12) = 0.129$$

所以 $n_1^* = 3.129$ ， $n_2^* = 4.129$ 。由 $n - \Delta_l = m + a = n^*$ ，当 $n=4, 5$ （主线系第 2, 3 条谱线）时，可以得到 $\Delta_l = 0.871$ 。

由于相邻两线可决定一个量子缺 Δ_l 值（属于同一量子数 l ），若在线系中测得四条谱线的波长，则可得三个 Δ_l 值，取平均值，即可求得该线系的量子缺失。

当量子缺失及主量子数 n 确定后，由 (1.4) 式，根据测出的波数 ν 还可求得固定项能级的光谱项数值。对每个线系均如此处理，根据所得数据，按照比例可画出钠原子部分能级图（以波数为单位）。为了便于比较，可在一侧以相同的比例画出熟悉的氢原子能级图。氢原子能级的波数按下式计算：

$$T_n = R_H / n^2$$

式中 $R_H = 109677.58\text{cm}^{-1}$ 。

思考与讨论

1. 实验中应怎样判断各线系和各谱线所对应的主量子数？
2. 对不同波段的谱线，应如何调节才能得到强度合适、分辨清晰、适合测量的谱线？
3. 根据测量的实验结果，各线系中双重线两个成分的强度比是否和讲义的计算结果一致？如果不一致，会是什么原因引起的？

参考资料

1. 褚圣麟著. 原子物理学. 北京: 人民教育出版社, 1979
2. 吴思诚、王祖铨主编. 近代物理实验 (第三版). 北京: 高等教育出版社, 2005
3. 高铁军, 朱俊孔主编. 近代物理实验. 济南: 山东大学出版社, 2000

附录

1. 钠原子光谱波长表

波长 (nm)	平均波长 (nm)	所属线系
616. 072	615. 7465	锐
615. 421		
589. 592	589. 2949	主
588. 995		
568. 892	568. 542	漫
568. 262		
515. 365	518. 542	锐
514. 910		
498. 287	498. 074	漫
497. 861		
474. 802	474. 9955	锐
475. 189		
466. 860	466. 673	漫
466. 486		
330. 294	330. 264	主
330. 234		
285. 363	285. 323	主
285. 283		
268. 044	268. 059	主
268. 074		

2. 里德伯表

附录、里德伯表 $109734.7/(m+a)^2$ $1 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$

a	1	12	2	23	3	34	4	45	5	56	6	67	7	78	8	89
0.00	10.973470	8.230103	2.743368	1.524093	1.219274	0.533433	0.685842	0.246903	0.438939	0.134120	0.304819	0.080870	0.223948	0.052488	0.171460	0.035986
0.02	10.547357	7.858044	2.689312	1.486134	1.203179	0.524144	0.679035	0.243586	0.435448	0.132652	0.302797	0.080122	0.222674	0.052068	0.170606	0.035732
0.04	10.145590	7.508751	2.636839	1.449440	1.187399	0.515071	0.672328	0.240329	0.431999	0.131205	0.300795	0.079384	0.221411	0.051652	0.169759	0.035480
0.06	9.766349	7.180462	2.585887	1.413958	1.171929	0.506208	0.665720	0.237130	0.428591	0.129778	0.298812	0.078654	0.220158	0.051241	0.168917	0.035231
0.08	9.407982	6.871584	2.536397	1.379639	1.156758	0.497548	0.659210	0.233987	0.425223	0.128373	0.296850	0.077934	0.218916	0.050834	0.168082	0.034984
0.10	9.068983	6.580668	2.488315	1.346435	1.141880	0.489086	0.652794	0.230900	0.421894	0.126988	0.294906	0.077222	0.217684	0.050431	0.167253	0.034739
0.12	8.747983	6.306396	2.441587	1.314300	1.127288	0.480816	0.646472	0.227867	0.418605	0.125623	0.292982	0.076519	0.216463	0.050033	0.166430	0.034497
0.14	8.443729	6.047565	2.396163	1.283190	1.112973	0.472732	0.640241	0.224887	0.415353	0.124277	0.291077	0.075824	0.215252	0.049639	0.165613	0.034257
0.16	8.155076	5.803080	2.351995	1.253066	1.098929	0.464830	0.634099	0.221960	0.412140	0.122950	0.289190	0.075138	0.214051	0.049249	0.164802	0.034019
0.18	7.880975	5.571938	2.309038	1.223888	1.085150	0.457104	0.628046	0.219083	0.408963	0.121643	0.287321	0.074460	0.212861	0.048863	0.163998	0.033783
0.20	7.620465	5.353219	2.267246	1.195618	1.071628	0.449549	0.622079	0.216255	0.405824	0.120354	0.285470	0.073790	0.211680	0.048481	0.163199	0.033550
0.22	7.372662	5.146083	2.226579	1.168221	1.058357	0.442161	0.616196	0.213476	0.402720	0.119083	0.283637	0.073129	0.210508	0.048103	0.162405	0.033318
0.24	7.136752	4.949756	2.186996	1.141664	1.045351	0.434934	0.610397	0.210745	0.399651	0.117830	0.281822	0.072475	0.209347	0.047729	0.161618	0.033089
0.26	6.911987	4.763527	2.148459	1.115915	1.032545	0.427866	0.604679	0.208061	0.396618	0.116594	0.280024	0.071829	0.208195	0.047359	0.160836	0.032862
0.28	6.697675	4.586742	2.110932	1.090941	1.019991	0.420950	0.599041	0.205422	0.393619	0.115376	0.278243	0.071190	0.207053	0.046993	0.160060	0.032637
0.30	6.493178	4.418798	2.074380	1.066715	1.007665	0.414183	0.593481	0.202827	0.390654	0.114175	0.276479	0.070560	0.205920	0.046630	0.159290	0.032414
0.32	6.297905	4.259136	2.038769	1.043208	0.995561	0.407562	0.587999	0.200277	0.387722	0.112990	0.274732	0.069936	0.204796	0.046271	0.158525	0.032193
0.34	6.111311	4.107244	2.004067	1.020393	0.983674	0.401082	0.582592	0.197769	0.384823	0.111822	0.273002	0.069320	0.203682	0.045916	0.157765	0.031974
0.36	5.932888	3.962644	1.970244	0.998246	0.971998	0.394739	0.577259	0.195302	0.381957	0.110669	0.271287	0.068711	0.202576	0.045565	0.157011	0.031757
0.38	5.762167	3.824897	1.937270	0.976740	0.960529	0.388530	0.572000	0.192877	0.379122	0.109533	0.269589	0.068110	0.201480	0.045217	0.156263	0.031542
0.40	5.598709	3.693593	1.905116	0.955854	0.949262	0.382451	0.566811	0.190492	0.376319	0.108412	0.267907	0.067515	0.200392	0.044872	0.155520	0.031329
0.42	5.442110	3.568353	1.873757	0.935565	0.938192	0.376499	0.561694	0.188146	0.373547	0.107307	0.266240	0.066927	0.199313	0.044531	0.154782	0.031118
0.44	5.291990	3.448824	1.843165	0.915851	0.927315	0.370670	0.556645	0.185839	0.370806	0.106216	0.264589	0.066346	0.198243	0.044194	0.154049	0.030906
0.46	5.147997	3.334680	1.813317	0.896692	0.916625	0.364962	0.551664	0.183570	0.368094	0.105140	0.262953	0.065772	0.197182	0.043860	0.153322	0.030701
0.48	5.009802	3.225614	1.784188	0.878068	0.906120	0.359371	0.546749	0.181337	0.365412	0.104079	0.261333	0.065204	0.196129	0.043529	0.152599	0.030496
0.50	4.877098	3.121343	1.755755	0.859962	0.895793	0.353894	0.541900	0.179140	0.362759	0.103032	0.259727	0.064643	0.195084	0.043202	0.151882	0.030292
0.52	4.749597	3.021601	1.727997	0.842354	0.885643	0.348528	0.537115	0.176979	0.360135	0.101999	0.258136	0.064089	0.194048	0.042878	0.151170	0.030090
0.54	4.627032	2.926141	1.700891	0.825227	0.875664	0.343271	0.532393	0.174853	0.357540	0.100980	0.256560	0.063540	0.193020	0.042557	0.150462	0.029890

	1	12	2	23	3	34	4	45	5	56	6	67	7	78	8	89
0.56	4.509151	2.834732	1.674419	0.808566	0.865853	0.338120	0.527733	0.172761	0.354972	0.099975	0.254998	0.062998	0.192000	0.042239	0.149760	0.029692
0.58	4.395718	2.747159	1.648559	0.792354	0.856205	0.330371	0.523134	0.170702	0.352432	0.098982	0.253450	0.062462	0.190988	0.041925	0.149063	0.029495
0.60	4.286512	2.663217	1.623294	0.776576	0.846718	0.328123	0.518595	0.168676	0.349919	0.098003	0.251916	0.061932	0.189984	0.041614	0.148370	0.029301
0.62	4.181325	2.582719	1.598606	0.761218	0.837388	0.323273	0.514115	0.166681	0.347433	0.097037	0.250396	0.061408	0.188988	0.041305	0.147683	0.029107
0.64	4.079964	2.505487	1.574476	0.746265	0.828211	0.318519	0.509692	0.164719	0.344974	0.096083	0.248890	0.060890	0.188000	0.041000	0.147000	0.028916
0.66	3.982243	2.431354	1.550889	0.731704	0.819185	0.313858	0.505327	0.162787	0.342540	0.095142	0.247398	0.060378	0.187019	0.040698	0.146322	0.028726
0.68	3.887992	2.360165	1.527828	0.717523	0.810305	0.309288	0.501017	0.160885	0.340132	0.094213	0.245918	0.059872	0.186047	0.040399	0.145648	0.028538
0.70	3.797048	2.291771	1.505277	0.703709	0.801568	0.304806	0.496762	0.159013	0.337749	0.093297	0.244452	0.059371	0.185081	0.040102	0.144979	0.028352
0.72	3.709258	2.226036	1.483222	0.690250	0.792972	0.300411	0.492561	0.157170	0.335391	0.092392	0.243000	0.058876	0.184124	0.039809	0.144315	0.028167
0.74	3.624478	2.162830	1.461648	0.677134	0.784514	0.296101	0.488413	0.155355	0.333058	0.091499	0.241560	0.058386	0.183173	0.039518	0.143655	0.027984
0.76	3.542572	2.102030	1.440542	0.664351	0.776190	0.291873	0.484317	0.153568	0.330749	0.090617	0.240132	0.057902	0.182230	0.039230	0.143000	0.027802
0.78	3.463411	2.043522	1.419889	0.651890	0.767999	0.287725	0.480273	0.151809	0.328464	0.089747	0.238718	0.057423	0.181295	0.038945	0.142349	0.027622
0.80	3.386873	1.987196	1.399077	0.639742	0.759936	0.283657	0.476279	0.150076	0.326203	0.088888	0.237316	0.056949	0.180366	0.038663	0.141703	0.027443
0.82	3.312846	1.932952	1.379894	0.627895	0.751999	0.279664	0.472335	0.148370	0.323965	0.088039	0.235926	0.056481	0.179445	0.038384	0.141061	0.027264
0.84	3.241219	1.880691	1.360527	0.616341	0.744186	0.275747	0.468439	0.146689	0.321750	0.087202	0.234548	0.056018	0.178530	0.038107	0.140423	0.027091
0.86	3.171890	1.830234	1.341566	0.605071	0.736494	0.271903	0.464592	0.145034	0.319557	0.086375	0.233182	0.055560	0.177623	0.037833	0.139790	0.026917
0.88	3.104762	1.781764	1.322997	0.594076	0.728921	0.268130	0.460791	0.143404	0.317387	0.085558	0.231829	0.055106	0.176722	0.037561	0.139161	0.026745
0.90	3.039742	1.734930	1.304812	0.583348	0.721464	0.264427	0.457037	0.141798	0.315239	0.084752	0.230487	0.054658	0.175829	0.037292	0.138536	0.026574
0.92	2.976744	1.689745	1.286999	0.572878	0.714121	0.260792	0.453329	0.140217	0.313113	0.083956	0.229156	0.054214	0.174942	0.037026	0.137916	0.026404
0.94	2.915684	1.646136	1.269549	0.562659	0.706890	0.257223	0.449666	0.138658	0.311008	0.083170	0.227837	0.053776	0.174062	0.036762	0.137299	0.026236
0.96	2.856484	1.604034	1.252450	0.552683	0.699767	0.253720	0.446047	0.137123	0.308924	0.082394	0.226530	0.053342	0.173188	0.036501	0.136687	0.026069
0.98	2.799069	1.563374	1.235695	0.542943	0.692752	0.250281	0.442471	0.135611	0.306861	0.081627	0.225234	0.052913	0.172321	0.036242	0.136079	0.025904
1.00	2.743368	1.524093	1.219274	0.533433	0.685842	0.246903	0.438939	0.134120	0.304819	0.080870	0.223948	0.052488	0.171460	0.035986	0.135475	0.025740